大湾ゼミTAセッション　事前課題

4年　渡邉到真

2022年4月6日

問1　用語の定義をなぞっていくのが大事だと思います。

1.　誤

$A \perp\!\!\!\perp B$ のとき、$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B)$ である。したがって、$\Pr(B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$

2.　誤

事象 C と事象 D が排反であるとき、$\Pr(C \cap D) = 0$。このとき、$\Pr(C|D) = \frac{\Pr(C \cap D)}{\Pr(D)} = 0$。
仮に $C \perp\!\!\!\perp D$ とすると $\Pr(C|D) = \Pr(C)\Pr(D)$ であるから、$\Pr(C) = 0$ もしくは $\Pr(D) = 0$ のとき以外は矛盾。
よって2事象が排反ならば2事象が独立とはいえない。

3.　誤

$C \perp\!\!\!\perp D$ のとき $\Pr(C|D) = \Pr(C)Pr(D)$ である。
仮に事象 C と事象 D が排反とすると、$\Pr(C \cap D) = 0$。このとき、$\Pr(C|D) = \frac{\Pr(C \cap D)}{\Pr(D)} = 0$ だから、$\Pr(C) = 0$ もしくは $\Pr(D) = 0$ のとき以外は矛盾。
よって2事象が独立ならば2事象が排反とはいえない。

4.　正

一般に

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) p_{Y|X}(y|x)$$

$X \perp\!\!\!\perp Y$ のとき、$p_{Y|X}(y|x) = \Pr(Y = y|X = x) = \Pr(Y = y) = p_Y(y)$ なので

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) p_Y(y)$$

が成り立つ。

問 2.　和記号を書き下すとわかりやすいと思います。

1.

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 1 + 2 + ... + 9 + 10 = 55$$

2.

$$\sum_{i=3}^{6} x_i = 3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

3.

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{10} 3x_i = \frac{1}{3} \times 3 \sum_{i=1}^{10} x_i = 55$$

4.

$$\sum_{i=1}^{10} 2 = 2 \times 10 = 20$$

5.

$$\left(\sum_{i=10}^{10} x_i\right)\left(\sum_{i=10}^{10} x_i\right) = 55 \times 55 = 3025$$

6.[1]

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) &= 1^2 + 2^2 + ... + 9^2 + 10^2 \\ &= \frac{1}{6} \times 10 \times (10 + 1) \times (2 \times 10 + 1) = 385\end{aligned}$$

7.

$$\left(\sum_{i=10}^{10} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=10}^{10} x_i\right)\left(\sum_{i=10}^{10} x_i\right) = 3025$$

8.

$$\sum_{i=1}^{10} x_{11-i} = x_{10} + x_9 + ...x_2 + x_1 = 10 + 9 + ... + 2 + 1 = 55$$

9.

$$\left(\sum_{i=10}^{10} x_i\right) / \left(\sum_{i=10}^{10} x_{11-i}\right) = \frac{55}{55} = 1$$

[1] $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

10.

$$\left(\sum_{i=10}^{10} x_i/x_{11-i}\right) = \frac{1}{10} + \frac{2}{9} + \dots \frac{9}{2} + \frac{10}{1}$$
$$= \frac{55991}{2520}$$

問 3

1.

コインのオモテウラは同様に確からしいので、

$$\Pr(X = 1) = \frac{1}{2}$$
$$\Pr(X = 0) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbf{E}[X] = \Pr(X = 1) \times 1 + \Pr(X = 0) \times 0 = \frac{1}{2}$$

2.

2 枚のコインのオモテウラは同様に確からしいので、

$$\Pr(X = 1) = \frac{3}{4}$$
$$\Pr(X = 0) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbf{E}[X] = \Pr(X = 1) \times 1 + \Pr(X = 0) \times 0 = \frac{3}{4}$$

3.

確率変数の期待値には線形性が成り立つので[2]

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[5X + 2]$$
$$= 5\mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[2] = 5 \times 5 + 2 = 27$$

4.

確率変数の期待値には線形性が成り立つので

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[X + b]$$
$$= \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[b] = -3 + b = 0$$

これを解いて $b = 3$

5.

確率変数の期待値の線形性は、確率変数同士の独立性を仮定しなくても成り立つ。よって、

$$\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2] = 4 + 9 = 13$$

[2]野口・西郷　『基本統計学』(培風館・2014 年)　48 ページ　などが詳しいと思います

6.

$$\mathbf{E}[X-\mathbf{E}[X]] = \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[\mathbf{E}[X]]$$

$\mathbf{E}[X]$ は定数なので、$\mathbf{E}[\mathbf{E}[X]] = \mathbf{E}[X]$ である。よって

$$\begin{aligned} &= \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[X] \\ &= 0 \end{aligned}$$

7.
一般に離散確率変数 X の分散は以下のように与えられる

$$Var(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$$

このとき、すべてのデータが平均と等しいときだけ分散は 0 になる。
よって $\forall i \;\; x_i = x_{i+1}$、つまりデータがすべて同一の値を取る時のときのみ $Var(X) = 0$ となる。

8.[3]

$$\begin{aligned} Var[Y] &= Var[5X+2] \\ &= 5^2 Var[X] = 25 \times 1 = 25 \end{aligned}$$

9.
Y を離散変数 $Y = \{y_i | i \in \mathbb{N}\}$ とする。[4]離散変数の条件付き期待値の定義より

$$\mathbf{E}[Y|D] = \sum_i y_i \Pr(Y = y_i | D)$$

$Y \perp\!\!\!\perp D$ であるから $\Pr(Y = y_i|D) = \Pr(Y = y_i)$ である。よって

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y|D] &= \sum_i y_i \Pr(Y = y_i | D) \\ &= \sum_i y_i \Pr(Y = y_i) \\ &= \mathbf{E}[Y] \end{aligned}$$

よって Y と D が独立ならば $\mathbf{E}[Y|D] = \mathbf{E}[Y]$ である。

(証明おわり)

---

[3] $Y = aX + b$ とおくと、$Var(Y) = \mathbf{E}[(Y - \mu_Y)]^2 = \mathbf{E}[\{(aX+b) - (a\mu_X + b)\}^2] = \mathbf{E}\{a^2(X - \mu_X)\}^2 = a^2 Var(X)$

[4] 連続変数の場合、$E[Y|D] = \int_{-\infty}^{\infty} yP(X = y|D)dx$ とおいて同様に証明できる

10.[5]

Y, D を離散変数 $Y = \{y_i | i \in \mathbb{N}\}, D = \{d_j | j \in \mathbb{N}\}$ とする

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[\mathbf{E}[Y|D]] &= \mathbf{E}[\sum_i y_i \Pr(Y = y_i|D)] \\
&= \sum_j [\sum_i y_i \Pr(Y = y_i|D = d_j)] \Pr(D = d_j) \\
&= \sum_j [\sum_i y_i \frac{\Pr(Y = y_i, D = d_j)}{\Pr(D = d_j)}] \Pr(D = d_j) \\
&= \sum_j \sum_i y_i \Pr(Y = y_i, D = d_j) \\
&= \sum_i y_i \Pr(Y = y_i) \\
&= \mathbf{E}[Y]
\end{aligned}
$$

(証明おわり)

[5]繰り返し期待値の法則 (The law of iterated expectations)