離散選択モデル入門

LPM, Logit, Probitによる二項選択モデル

北川梨津

2022年7月18日（海の日）

1 離散選択モデル

- 離散的な選択肢の中から何かを選ぶこと（何かが選ばれること）を**離散選択**（discrete choice）と呼ぶ.
  - 例：人事考課（$\{S, A, B, C\}$.）
- その統計モデルを**離散選択モデル**（discrete choice model）と呼ぶ.
  - 例：$\Pr(S \mid X), \Pr(A \mid X), \Pr(B \mid X), \Pr(C \mid X)$.
- つまり，従属変数が離散型の変数の回帰モデル.
- 今日は2つの選択肢がある場合に限定して議論する.
  - **二項選択モデル**（binary choice model）.

2 二項選択モデル

- 選択肢が2つの例：ハイパフォーマー，昇進，離職など.
- カテゴリーが2つなので，**ダミー変数**として扱える.
- $\Pr(Y = 1 \mid X) = 1 - \Pr(Y = 0 \mid X)$ なので，一方の確率を考えるだけでよい.
- すると，$\Pr(Y = 1 \mid X) = f(X \mid \beta)$ という回帰モデル$f(X \mid \beta)$を推定するという問題ということになる.
- $f(X \mid \beta)$にどのような関数を仮定するか？

3 主要な3つのモデル

- 線形確率モデル（LPM; linear probability model）
  - $\Pr(Y = 1 \mid X) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k$
- ロジット・モデル（logit model）
  - $\Pr(Y = 1 \mid X) = \frac{\exp(\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_k X_k)}{1+\exp(\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_k X_k)}$
- プロビット・モデル（probit model）
  - $\Pr(Y = 1 \mid X) = \Phi(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k)$

4 線形確率モデル

- $\Pr(Y = 1 \mid X)$を説明変数の線形結合$\beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k$で近似するモデル.
- 単に従属変数をダミー変数として線形モデルをOLS推定すればよい.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k + \varepsilon \qquad (1)$$

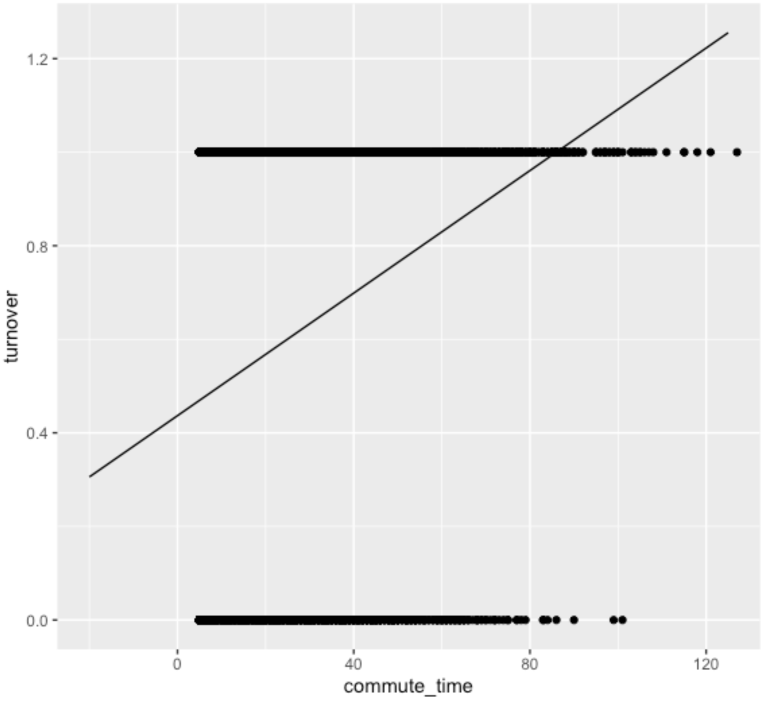
式(1)の両辺の条件付き期待値をとると,

$$\mathrm{E}[Y \mid X] = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k.$$

$Y \in \{0,1\}$なら, $\mathrm{E}[Y \mid X] = \Pr(Y = 1 \mid X)$なので,

$$\Pr(Y = 1 \mid X) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k \qquad (2)$$

5 LPMのイメージ



6 LPMの良いところと悪いところ

- 悪いところ
  - 確率の性質を満たさない． （論理的整合性がない）
  - 必ず不均一分散になる． （頑健な標準誤差を使えばよい）
- 良いところ
  - 解釈しやすい．
  - 固定効果法や操作変数法などもそのまま適用できる．

7 LPMの実装

```
library(modelsummary);
library(dplyr)
mydata <-
readr::read_csv("turnover.csv")

mydata %>%
  lm(turnover ~ tenure +
commute_time, data = .) %>%
  modelsummary(vcov = "robust",
               gof_map = c("nobs",
"r.squared"),
               stars = TRUE)
```

	Model 1
(Intercept)	0.481***
	(0.015)
tenure	-0.003***
	(0.001)
commute_time	0.007***
	(0.000)
Num.Obs.	5000
R2	0.085

8 LPMの解釈

- 推定されたモデル：
- $\widehat{\mathrm{Pr}}(Y = 1 \mid X) = 0.481 - 0.003 \times tenure + 0.007 \times commute\_time$
- 左辺は確率なので，係数の値は説明変数が1単位上昇したときの確率の増加分として解釈できる（セテリスパリブス）．
- 勤続年数が10年増えると，離職確率が0.03減少する．
  - 「離職確率が0.03減少する」=「離職確率が3%ポイント減少する．」
  - 「離職確率が3%減少する」は間違い．
- ある説明変数の効果の大きさを示すときに，従属変数の平均値と比べて，そこから何%増えたかを計算することがある．
  - `mean(mydata$turnover)`は`0.6296`なので，$\frac{0.5996 - 0.6296}{0.6296} = -0.047$，約5%の減少．
- 今回のサンプルデータは違うが，事象がそもそも稀だと係数が小さくても，かなり大きな効果であることがある．

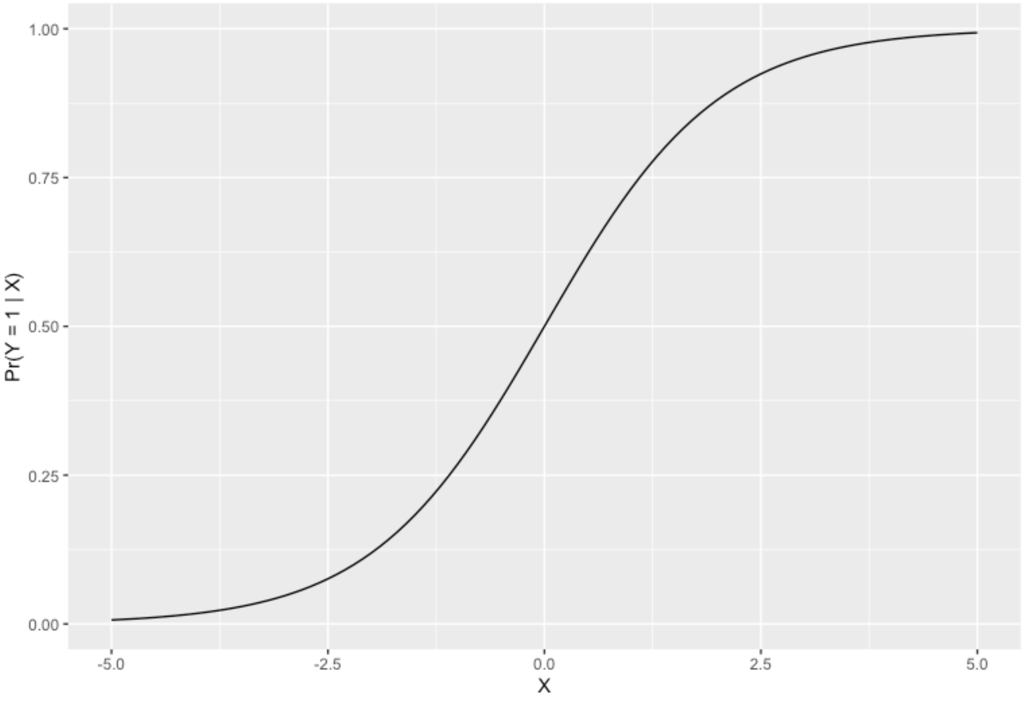
9 ロジット・モデル

- $\Pr(Y = 1 \mid X) = \frac{\exp(\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_k X_k)}{1+\exp(\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_k X_k)}$とするモデル.
- 右辺は必ず0と1の間の値をとるので，確率の性質を満たす.
- **最尤法**を使ってパラメータを推定する.
- 最尤法のイメージ：手元のデータが尤もらしくなるようなパラメータの値は何だろう～？
- 尤度：$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \left[\Lambda(\beta_0 + \beta_1 X_{1i})^{Y_i} \times \left(1 - \Lambda(\beta_0 + \beta_1 X_{1i})\right)^{1-Y_i}\right]$.

10 ロジット・モデルの推定

- 尤度を最大化するパラメータの値を求める = **最尤推定**（MLE; maximum likelihood estimation）.
$$\hat{\beta}^{\mathrm{MLE}} = \operatorname*{argmax}_{\beta} \quad L(\beta)$$
- 実際には計算しやすくなるため，対数尤度を最大化する.
$$\hat{\beta}^{\mathrm{MLE}} = \operatorname*{argmax}_{\beta} \quad \log\bigl(L(\beta)\bigr)$$
- ニュートン法などの数値計算でこれを求める. （Rがやってくれる）

11 ロジット・モデルのイメージ



12 ロジット・モデルの実装

```
library(modelsummary);
library(dplyr)
mydata <-
readr::read_csv("turnover.csv")

mydata %>%
  glm(turnover ~ tenure +
commute_time,
      data = .,
      family = binomial(link =
"logit")) %>%
  modelsummary(gof_map = c("nobs",
"r.squared"),
               stars = TRUE)
```

	Model 1
(Intercept)	-0.185**
	(0.068)
tenure	-0.013***
	(0.003)
commute_time	0.034***
	(0.002)
Num.Obs.	5000

13 ロジット・モデルの解釈1

- 係数はそのまま効果として解釈することはできない.
- 非線形なモデルなので，元の$X_1, X_2, \cdots, X_k$の水準によって，説明変数の効果の大きさも変わる.
- 経済学では，効果の評価のために**平均限界効果**（AME; average marginal effect）を計算することが多い.

$$\mathrm{AME}_{X_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pr(Y_i = 1 \mid X_i)}{\partial X_{1i}}$$

- ただし，説明変数がダミー変数の場合は，微分できないので，差をとる.

$$\mathrm{AME}_{X_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} [\Pr(Y_i = 1 \mid X_i, X_{1i} = 1) - \Pr(Y_i = 1 \mid X_i, X_{1i} = 0)]$$

14 ロジット・モデルの解釈2

- $\frac{\partial \Lambda(\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_k X_k)}{\partial X_j} = \frac{\exp(\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_k X_k)}{\left(1+\exp(\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_k X_k)\right)^2}\beta_j$なので，係数の推定値と限界効果の符号は一致する．
- 係数の推定値だけでは効果の大きさがわからないが，効果の方向はわかる．

15 平均限界効果の求め方

```r
library(marginaleffects)

mydata %>%
  mutate(female =
as.factor(female)) %>%
  glm(turnover ~ tenure +
commute_time,
      data = .,
      family = binomial(link =
"logit")) %>%
  marginaleffects() %>%
  modelsummary(gof_map = c("nobs"),
               stars = TRUE)
```

	Model 1
tenure	-0.003***
	(0.001)
commute_time	0.007***
	(0.000)
Num.Obs.	5000

16 プロビット・モデル

- $\Pr(Y = 1 \mid X) = \Phi(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k)$.
- 他は，ロジット・モデルと同様の議論が成り立つ.
- Rでは，`glm(y ~ x, family = binomial(link = "probit"))`とすればよい.

17 LPM, ロジット，プロビットの比較

LPMの係数，ロジット，プロビットのAMEはだいたい同じような値になることが多い．

	LPM	Logit (AME)	Probit (AME)
(Intercept)	0.48091***		
	(0.01454)		
tenure	-0.00290***	-0.00283***	-0.00286***
	(0.00060)	(0.00059)	(0.00059)
commute_time	0.00653***	0.00717***	0.00705***
	(0.00031)	(0.00032)	(0.00031)
Num.Obs.	5000	5000	5000

18 潜在変数モデル

- ロジットやプロビットを**潜在変数**に基づいて導出することもできる．（ここではプロビットを例に．）
- 個人の意思決定の場合は，経済学的には効用として解釈できる．

$$Y_i^* = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

$$u_i \mid X \sim N(0,1)$$

として，

$$Y_i = \begin{cases} 0 & (Y_i^* \leq 0) \\ 1 & (Y_i^* > 0) \end{cases}$$

つづき

- すると，

$$\Pr(Y_i = 1 \mid X) = \Pr(Y_i^* > 0 \mid X)$$
$$= \Pr(u_i > -\beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \cdots - \beta_k X_k \mid X)$$
$$= 1 - \Phi(-\beta_0 - \beta_1 X_{1i} - \cdots - \beta_k X_k)$$
$$= \Phi(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \cdots + \beta_k X_k)$$

19 内生性

線形回帰と同じように，内生性があると，推定量が一致性を持たない.

- LPMで操作変数法や固定効果法を使う.
- 固定効果ロジットを使う.
- IVプロビットを使う.

20 被説明変数が2値でないとき

- 3つ以上のレベルがあるとき（順序がある）．
  - 例：「不満」「やや不満」「やや満足」「満足」
  - 単に，1, 2, 3, 4としてOLS.
  - どこかで区切って2カテゴリーに変換：「満足」「不満」
  - $\mathrm{Pr}(Y = 4 \mid X), \mathrm{Pr}(Y \geq 3 \mid X), \mathrm{Pr}(Y \geq 2 \mid X)$をそれぞれ推定.
  - 順序ロジット，順序プロビット.
- 3つ以上のカテゴリーがあるとき（順序がない）．
  - 例：希望部署
  - ある選択肢とそれ以外の0-1のダミー変数$D_1, \dots D_J$を作って，$J-1$個の回帰モデルを推定する.
  - 多項ロジット，多項プロビット.