



Ch.7

Instrumental Variables

(操作変数)

大湾ゼミ
梶田菜月 富澤陽仁

AGENDA

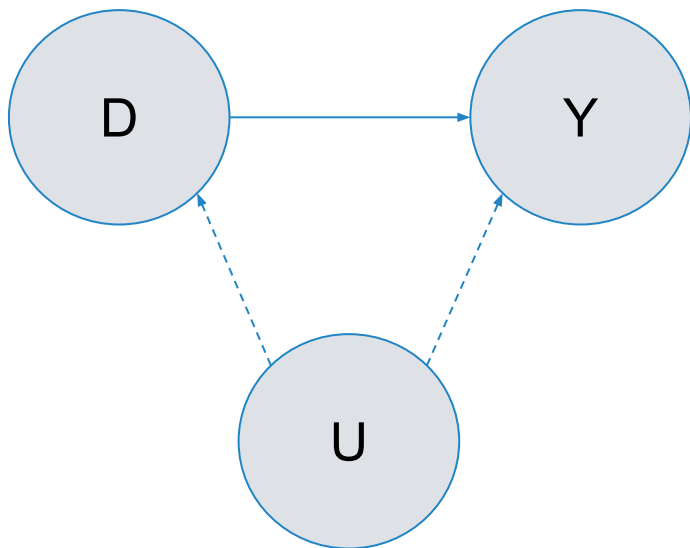
- ▷ 操作変数の直感的な理解
- ▷ 均一な処置効果のもとでの操作変数
- ▷ 親の覚せい剤乱用と里親制度
- ▷ 弱い操作変数が引き起こす問題

7.2

Intuition of Instrumental Variables

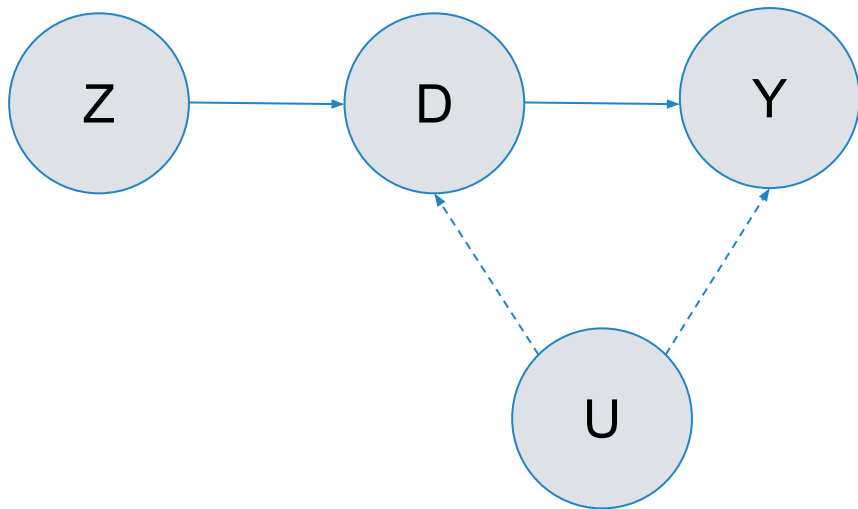
操作変数の直感的な理解

7.2.1 Canonical IV DAG



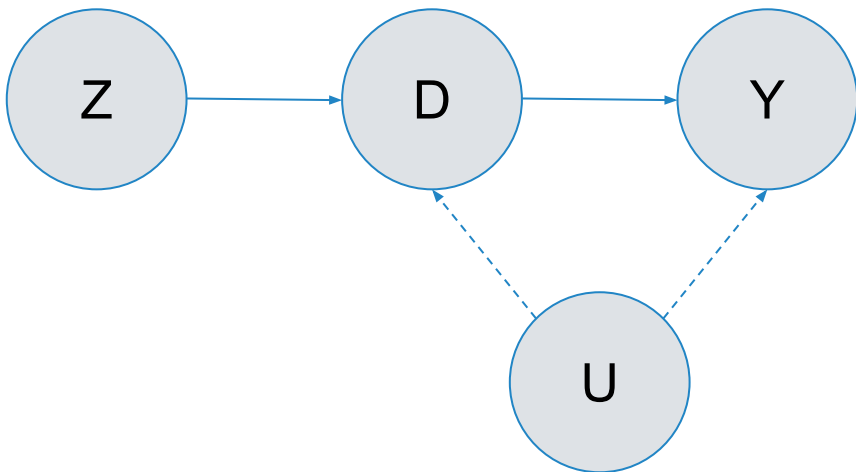
- ▷ Uは観測できない
- ▷ バックドアパスは開かれたまま
- ▷ DとYの直接的な因果関係はわからない

7.2.1 Canonical IV DAG



- ▷ 操作変数Zの導入
- ▷ ZはDと相関するが、Uとは相関していない
- ▷ Z affects Y “only through” D.

7.2.1 Canonical IV DAG



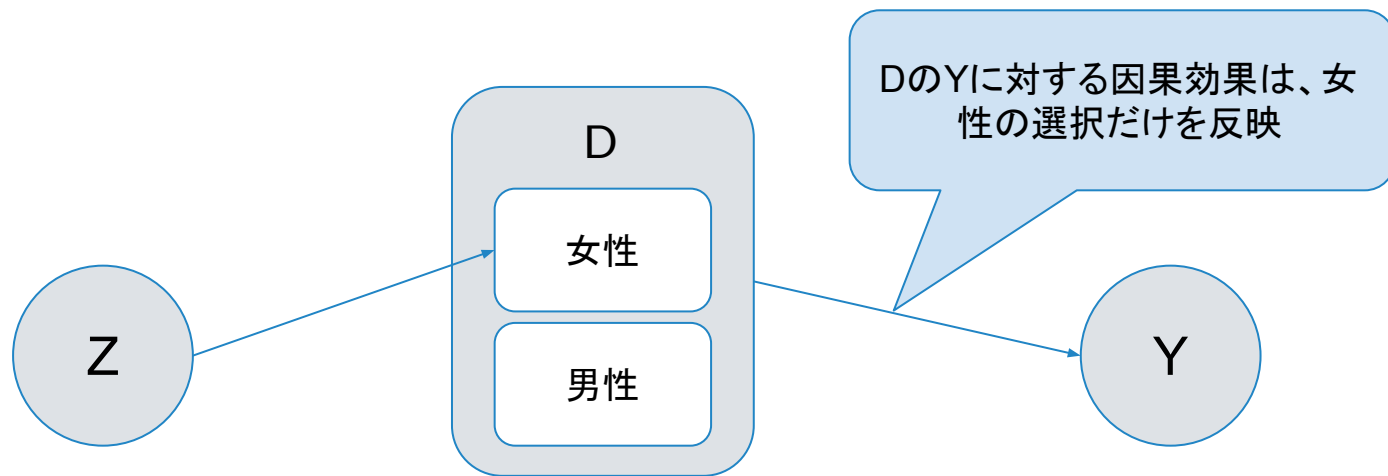
▷ Exclusion restriction

DがZとUのColliderであるためZとUは独立である

これは検証することができない

⇒IV推定量は、ZがD以外のYを決定する変数から独立しているということを仮定している。

7.2.1 Canonical IV DAG



問題①操作の影響に異質性がある場合(男性がYに与える影響が女性とは異なる)、ZはYに対するDの因果効果のうち女性のものだけしか特定することができない。

問題②女性のデータしかとることができないため、実際のDとYの因果関係を特定するには、データが少なくなってしまう。

7.2.1 Canonical IV DAG

▷ 操作変数の難しさ

①操作変数は、操作の結果として行動が変化したグループ(コンプライアー)についての因果効果のみを識別

=コンプライアーの因果効果” the causal effect of the complier population”

②操作変数は、通常より大きな標準誤差を持つので、棄却に失敗することが多い

7.2.1 Canonical IV DAG

▷ 操作変数の難しさ

②操作変数は、通常より大きな標準誤差を持つので、検出力不足以外の理由がない多くの場合、棄却に失敗する

問題②より

使えるデータが少ない

→データのばらつき(分散)が大きい

→推定量の分散が大きい

→標準誤差が大きい

→検定の統計量が小さくなる

→棄却に失敗する

7.2.2 Good instruments should feel weird

▷ 良い操作変数とは

操作変数に対する結果(被説明変数)の話をしたときに、人々がすぐにはその関係を理解できない操作変数

e.g.

家族の大きさ(子どもの人数の大小)が、女性の労働供給量に影響する
→子どもが多い女性の方が家庭外で働く機会が少ない

最初の2人の子どもが同性であることが、女性の労働供給量に影響する
→ ???

7.2.2 Good instruments should feel weird

▷ 良い操作変数とは

最初の2人の子どもが同性であった母親は、2人の子どもの男女比が均衡していた母親よりも家庭外で働いていない

→性別の多様性を重視する家族にとって同性の子供は3人目を出産する(家族のサイズ)インセンティブとなる

良い操作変数Z	同性の子供
説明変数(内生変数)D	家族のサイズ
被説明変数Y	女性の労働供給

7.3

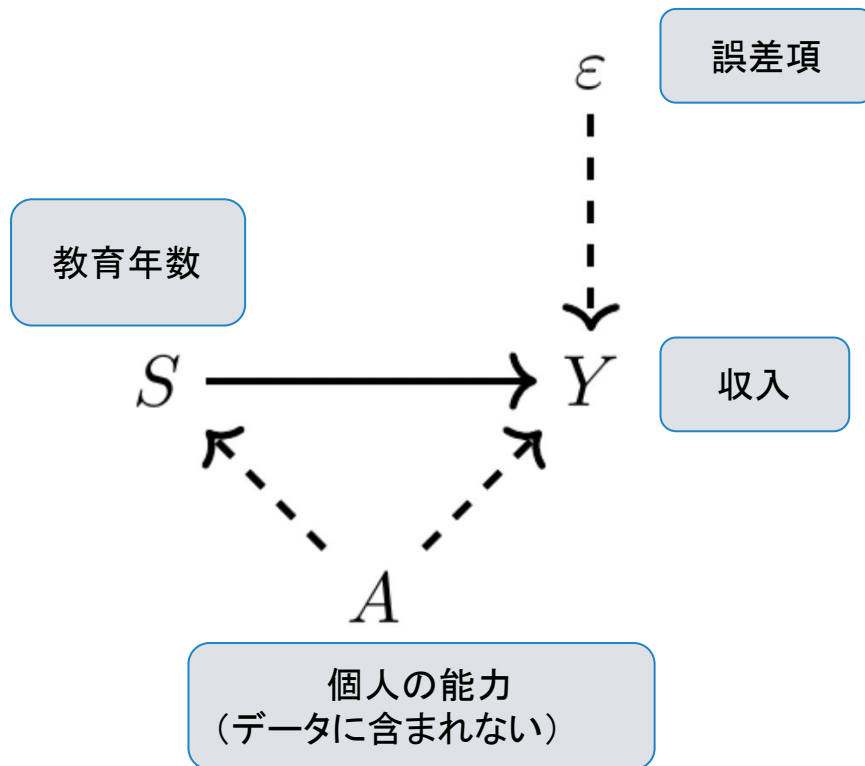
Homogeneous Treatment Effects

均一な処置効果のもとでの操作変数

この節のポイント

- 内生性の問題がある時にはOLS推定量はバイアスを持つ
- 操作変数法を使うときは2つの仮定が満たされている必要がある
- 二段階最小二乗法
 - 操作変数推定量は、説明変数の外生的な変動を通じた被説明変数への影響を測っている

学校教育が収入に与える影響



推定するモデル

- 真のモデル(実際にはAのデータがないので成り立たない)

$$Y_i = \alpha + \delta S_i + \gamma A_i + \varepsilon_i$$

- 実際のモデル

$$Y_i = \alpha + \delta S_i + \eta_i \quad \eta_i = \gamma A_i + \varepsilon_i$$

内生性の問題！

- 処置効果 δ は一定と仮定

OLS推定量はバイアスを持つ

- モデルのOLS推定量

$$\hat{\delta} = \frac{C(Y, S)}{V(S)} = \frac{E[YS] - E[Y][S]}{V(S)}$$

欠落変数バイアス

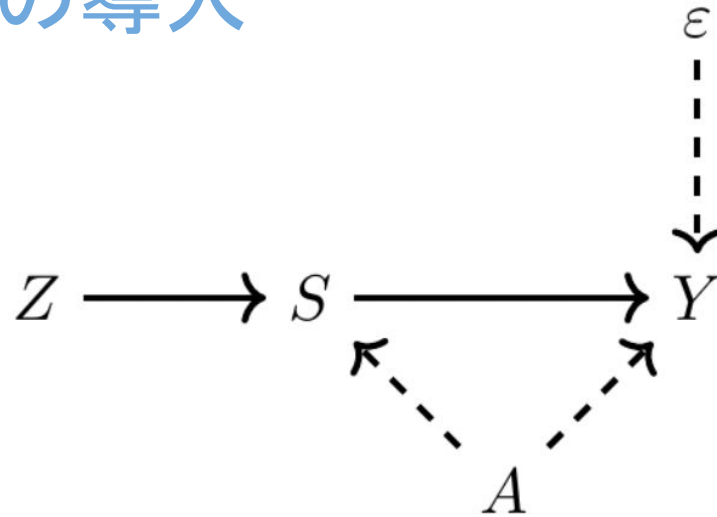
$$\begin{aligned}\hat{\delta} &= \frac{E[\alpha S + S^2\delta + \gamma SA + \varepsilon S] - E[\alpha + \delta S + \gamma A + \varepsilon][S]}{V(S)} \\ &= \frac{\delta E(S^2) - \delta E(S)^2 + \gamma E(AS) - \gamma E(S)E(A) + E(\varepsilon S) - E(S)E(\varepsilon)}{V(S)} \\ &= \delta + \gamma \frac{C(AS)}{V(S)}\end{aligned}$$

能力と教育年数の
相関は正

能力が収入に与える
影響は正

$= \text{COV}(\varepsilon, S) = 0$

操作変数の導入



- ▶ Z は教育年数 S を通してのみ収入 Y に影響を与える
- ▶ Z は能力 A や誤差項とは無相関(exclusion restriction)

操作变数推定量

$$\hat{\delta} = \frac{C(Y, Z)}{C(S, Z)}$$

Reduced form
(誘導形)

First stage
(一段階)

導出

Sを通してYに影響を与えているので $\neq 0$

$$\begin{aligned} C(Y, Z) &= C(\alpha + \delta S + \gamma A + \varepsilon, Z) \\ &= E[(\alpha + \delta S + \gamma A + \varepsilon), Z] - E(S)E(Z) \\ &= \{\alpha E(Z) - \alpha E(Z)\} + \delta\{E(SZ) - E(S)E(Z)\} \\ &\quad + \gamma\{E(AZ) - E(A)E(Z)\} + \{E(\varepsilon Z) - E(\varepsilon)E(Z)\} \\ &= \delta C(S, Z) + \gamma C(A, Z) + C(\varepsilon, Z) \end{aligned}$$

$\neq 0$ である必要！

Exclusion Restrictions
より0

操作変数が満たすべき2つの条件

$Y_i = \alpha + \delta S_i + \eta_i$ において、

$$C(S, Z) \neq 0$$

$$C(\eta, Z) = 0$$


$$\eta_i = \gamma A_i + \varepsilon_i$$

を満たすZを**操作変数**という

7.3.1 Two-stage least squares

(2SLS: 二段階最小二乗法)

- 2SLS推定量はIV推定量と一致
- IV推定量は説明変数の外生的な変動が被説明変数に与える影響を捉えたものである
- IV推定量は2つの条件のもとで一致推定量

7.3.1 Two-stage least squares (2段階最小二乗法)

➤ **二段階最小二乗法**: 操作変数推定量のもう一つの推定方法

1. 説明変数Sを操作変数Zに回帰(一段階)
これをOLS推定して、Sの予測値を取得

$$S_i = \gamma + \beta Z_i + \epsilon_i \xrightarrow{\text{OLS}} \hat{S}_i = \hat{\gamma} + \hat{\beta} Z_i$$

2. 被説明変数を説明変数の予測値に回帰

$$Y_i = \alpha + \delta \hat{S}_i + \epsilon_i$$

7.3.1 Two-stage least squares

(2SLS: 二段階最小二乘法)

$$Y_i = \alpha + \delta S_i + \varepsilon_i$$

$$S_i = \gamma + \beta Z_i + \epsilon_i$$

where $C(Z, \varepsilon) = 0$ and $\beta \neq 0$

exclusion restriction

Non-zero first stage

2SLS推定量はIV推定量と一致

$$\hat{\delta}_{2SLS} = \frac{C(\hat{\beta}Z, Y)}{V(\hat{\beta}Z)} = \frac{C(\hat{S}, Y)}{V(\hat{S})} = \hat{\delta}_{IV}$$

IV推定量はSの外生的な変動を取り出す

➤ $\hat{\beta}Z$ は $\hat{S}_i = \hat{\gamma} + \hat{\beta}Z_i$ より、操作変数によって

引き起こされた**外生的な変動**

➤ つまり操作変数Zを使うことで内生変数Sの外生的な変動による被説明変数Yへの因果効果を測ることができる

IV推定量は仮定のもとで一致推定量

- Exclusion RestrictionsとNon-zero first stageが成り立つとき、

$$p \lim \hat{\delta} = \delta$$

となり**一貫性**を持つ

- ただし操作変数と説明変数(内生変数)の相関が弱いとき、バイアスを持つ(7.5参照)

IV推定量は仮定のもとで一致推定量(参考)

$$\begin{aligned}\hat{\delta} &= \frac{C(Y, Z)}{C(S, Z)} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})(Y_i - \bar{Y})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})(S_i - \bar{S})} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})Y_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})S_i}\end{aligned}$$

IV推定量は仮定のもとで一致推定量(参考)

$$\hat{\delta} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z}) \{\alpha + \delta S + \varepsilon\}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z}) S_i}$$

$$= \delta + \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z}) \varepsilon_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z}) S_i}$$

サンプルサイズが大きくなるとこの項は小さくなる

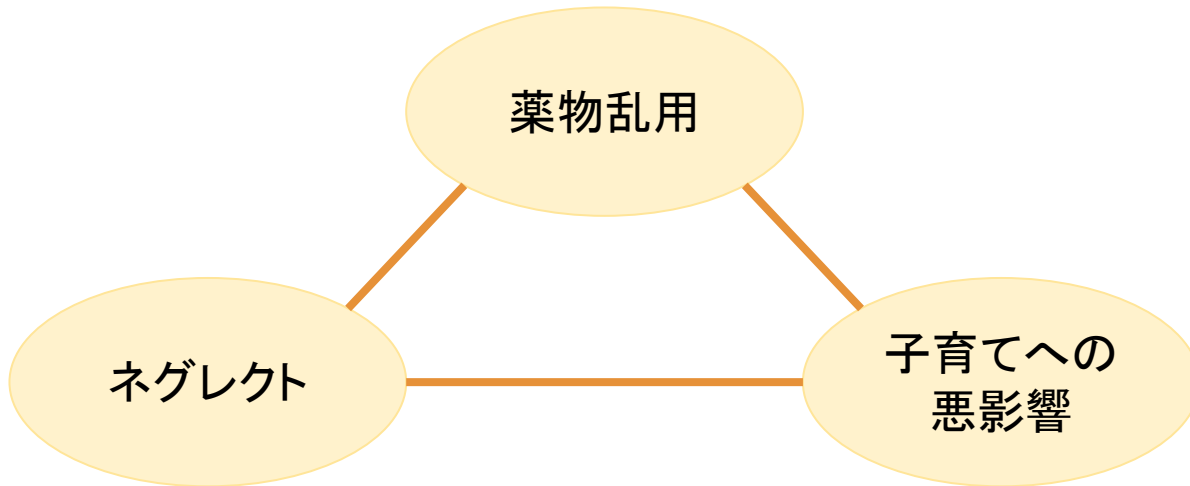
7.4

親の覚醒剤乱用と里親制度

(Cunningham and Finlay, 2012)

7.4 親の覚醒剤乱用と里親制度

- ▶ 親の覚せい剤服用による子どもへの虐待から里親への委託に与える影響を推定



7.4 親の覚醒剤乱用と里親制度

- ▷ methamphetamine (=meth)
心身に有害な毒、高い依存性
警察などの発表では、メスの蔓延が里親募集の増加を引き起こす

⇒しかし、どうやって相関関係と因果関係を区別するか

⇒メスの製造方法によって可能

7.4 親の覚醒剤乱用と里親制度

▷ methamphetamine (=meth)

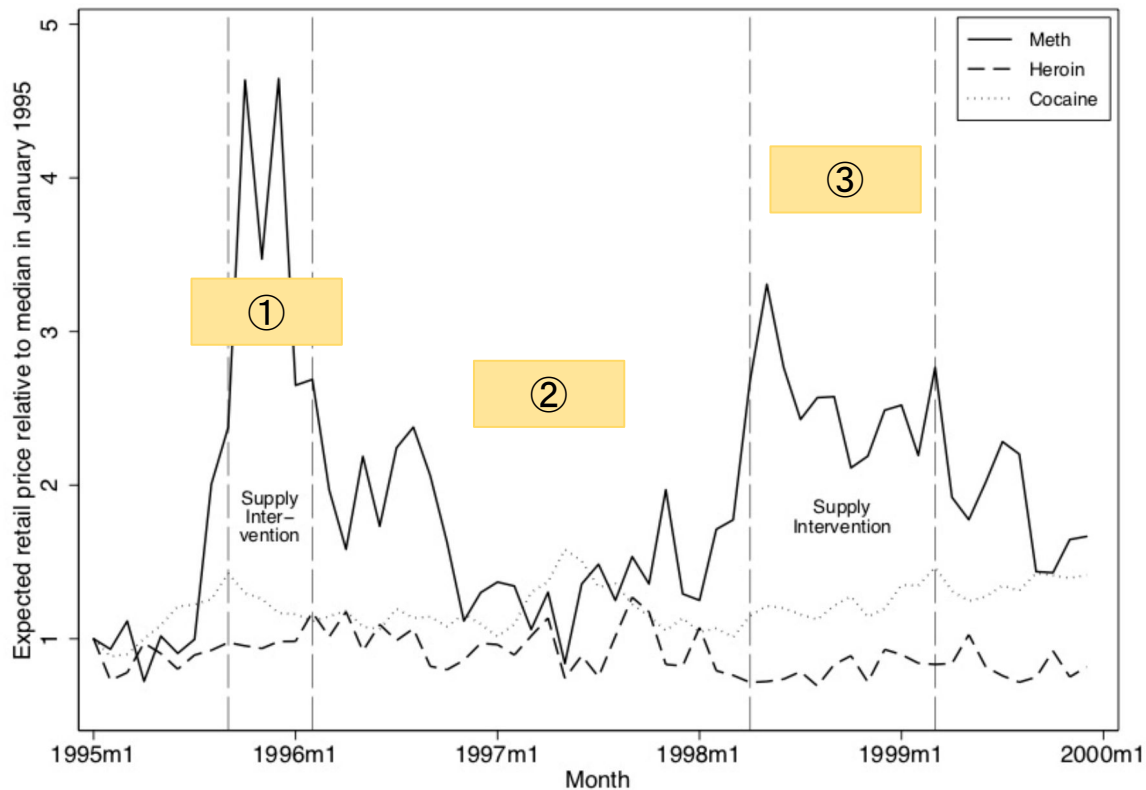
市販の風邪薬の有効成分でもあるエフェドリンまたはプソイドエフェドリンの還元物から合成される

- ①米国議会がエフェドリンを主成分とする医薬品に規制
- ②しかしすぐにプソイドエフェドリンから合成されたメスが出回るように
- ③その後プソイドエフェドリンも規制対象に

7.4 親の覚醒剤乱用と里親制度

操作変数Z	小売価格の変動により計量した規制ショック
説明変数D	メス依存の治療のための入院者数
被説明変数Y	実の親元を離れ里親に預けられる子どもの数

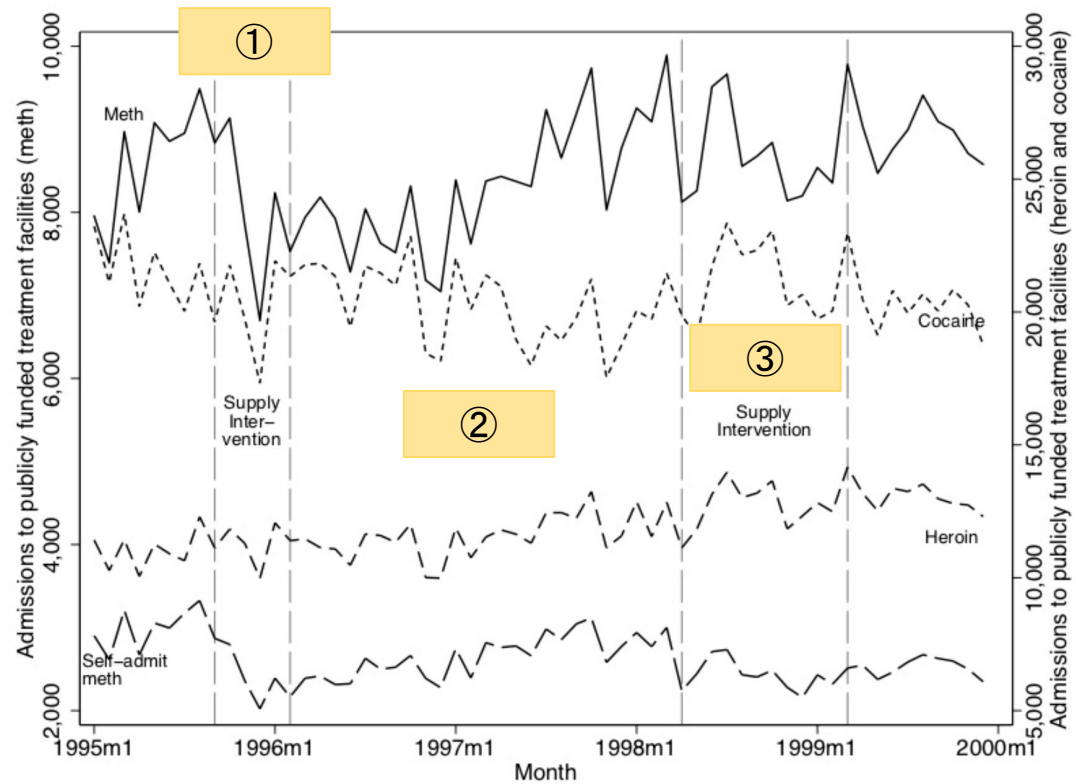
メス、ヘロイン、コカインの小売価格の推移



- ▷ 米国議会による規制がメス市場にしか影響を与えていないことがわかる。
- ▷ 規制はメス市場に独自の影響を与え、その他の麻薬市場とは切り離してメスの影響を分析できる

Figure 7.1: Ratio of Median Monthly Expected Retail Prices of Meth, Heroin, and Cocaine Relative to Their Respective Values in 1995, STRIDE 1995–1999. Reprinted from Cunningham and Finlay (2012).

連邦政府が資金援助しているクリニックで薬物依存の治療を受ける人の数の推移



- ▷ エフェドリンの規制の際の効果は劇的である。
- ▷ プソイドエフェドリンのときは、わかりにくいもののメス依存による治療者数の増加は鈍化。
- ▷ ヘロインとコカインには影響がないこともわかる。

Figure 7.2: Visual representation of the equivalent of the first stage. Reprinted from Cunningham and Finlay (2012).

家族から引き離され里親に預けられた子どもの数の推移



- ▶ 一回目の規制後は約8000人から約6000人に減少
- ▶ 二回目の介入の効果が薄い理由は
 - ①価格への効果が一回目の半分程度だったこと
 - ②メキシコからメス輸入が増えたこと

Figure 7.3: Figure 4 from Cunningham and Finlay (2012) showing reduced form effect of interventions on children removed from families and placed into foster care. Cunningham and Finlay (2012)

	Log Latest Entry into Foster Care		Log Latest Entry into Child Neglect		Log Latest Entry into Physical Abuse	
Covariates	OLS	2SLS	OLS	2SLS	OLS	2SLS
Log self-referred	0.001	1.54***	0.03	1.03***	0.04	1.49**
Meth treatment rate	(0.02)	(0.59)	(0.02)	(0.41)	(0.03)	(0.62)
Month-of-year fixed effects	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
State controls	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
State fixed effects	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
State linear time trends	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
First Stage Instrument						
Price deviation instrument		-0.0005***		-0.0005***		-0.0005**
		(0.0001)		(0.0001)		(0.0001)
F ² -statistic for IV in first stage		17.60		17.60		17.60
N	1,343	1,343	1,343	1,343	1,343	1,343

Table 7.1: Log Latest Entry into Foster Care

- ▷ OLSで回帰した結果を見ると...
メス依存による治療者数の変動は、里親に預けられる子どもの数や、ネグレクト、虐待に対してほとんど影響していない。
- ▷ *(統計的に有意であることを示す)が
ついていないので、このデータによってわかることは何もない。

Covariates	Log Latest Entry into Foster Care		Log Latest Entry into Child Neglect		Log Latest Entry into Physical Abuse	
	OLS	2SLS	OLS	2SLS	OLS	2SLS
Log self-referred	0.001	1.54***	0.03	1.03***	0.04	1.49**
Meth treatment rate	(0.02)	(0.59)	(0.02)	(0.41)	(0.03)	(0.62)
Month-of-year fixed effects	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
State controls	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
State fixed effects	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
State linear time trends	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes

First Stage Instrument				
Price deviation instrument		-0.0005***	-0.0005***	-0.0005**
		(0.0001)	(0.0001)	(0.0001)
F ² -statistic for IV in first stage		17.60	17.60	17.60
N	1,343	1,343	1,343	1,343

Table 7.1: Log Latest Entry into Foster Care

- ▷ 2SLSで回帰した結果を見ると...
- ▷ まずは first stage
価格が一単位上がると、メス依存による治療者数は0.05%減少する。
- ▷ *統計的に有意
- ▷ F統計量が一般的に10より上であるため、強い操作変数であると言える。

	Log Latest Entry into Foster Care	Log Latest Entry into Child Neglect	Log Latest Entry into Physical Abuse			
Covariates	OLS	2SLS	OLS	2SLS	OLS	2SLS
Log self-referred	0.001	1.54**	0.03	1.03***	0.04	1.49**
	(0.02)	(0.59)	(0.02)	(0.41)	(0.03)	(0.62)
Meth treatment rate						
Month-of-year fixed effects	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
State controls	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
State fixed effects	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
State linear time trends	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
First Stage Instrument						
Price deviation instrument		-0.0005***		-0.0005***		-0.0005**
		(0.0001)		(0.0001)		(0.0001)
F ² -statistic for IV in first stage		17.60		17.60		17.60
N	1,343	1,343	1,343	1,343	1,343	1,343

▷ 2SLSで回帰した結果を見ると...
 メス依存による治療者の数の変動は、里親に預けられる子どもの数や、ネグレクト、虐待に影響している。

(注) 変数のどちらも対数を取っている。

Table 7.1: Log Latest Entry into Foster Care

7.5

The Problem of Weak Instruments

弱い操作変数が引き起こす問題

Angrist and Krueger(1991)

- 学校教育が将来の収入に与える影響を測った研究
- 米国の教育制度と義務教育法を利用
 - 教育制度:12/31以前に生まれた子供は1年生、1/1生まれは幼稚園
 - 義務教育法:16歳まで学校に通わなければならない
- 1月生まれの人は16歳の時点で12月生まれより少ない学校教育
(1日しか誕生日が違わないのに！)

Angrist and Krueger(1991)

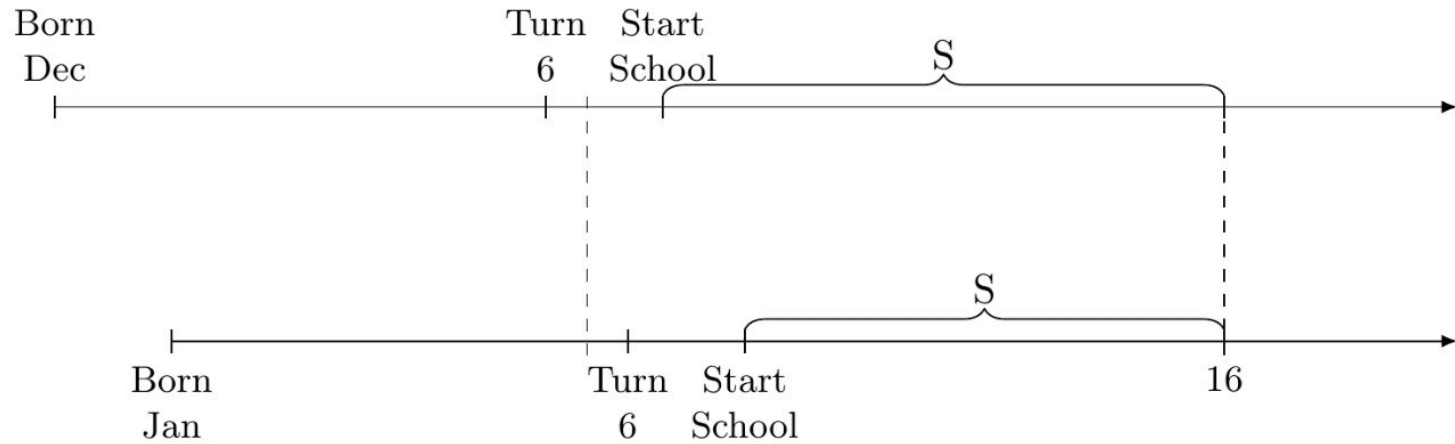


Figure 7.4: Compulsory schooling start dates by birthdates.

Angrist and Krueger(1991)

- 被説明変数Y: $\log(\text{週給})$
説明変数 X: 教育年数
操作変数 Z: 出生四半期(1-3 / 4-6 / 7-9 / 10-12月)
- 出生四半期が収入に影響を与える直感的な理解ができないと言う
点で、この操作変数は良い操作変数
(7.2.2 Good Instruments should feel weird)

出生四半期と教育年数の関係 C(S,Z)

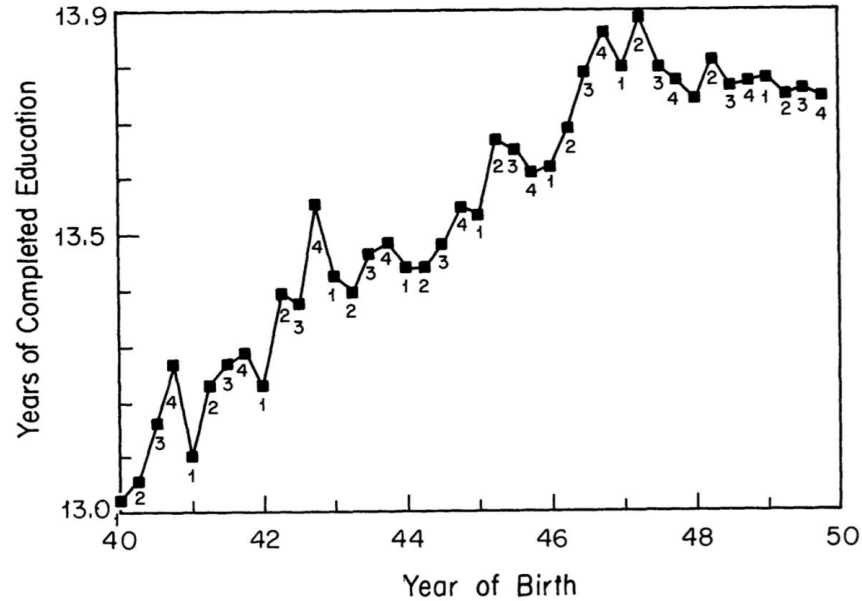


Figure 7.5: First stage relationship between quarter of birth and schooling. Reprinted from Angrist and Krueger (1991).

log(週給)と出生四半期の関係 C(Y,Z)

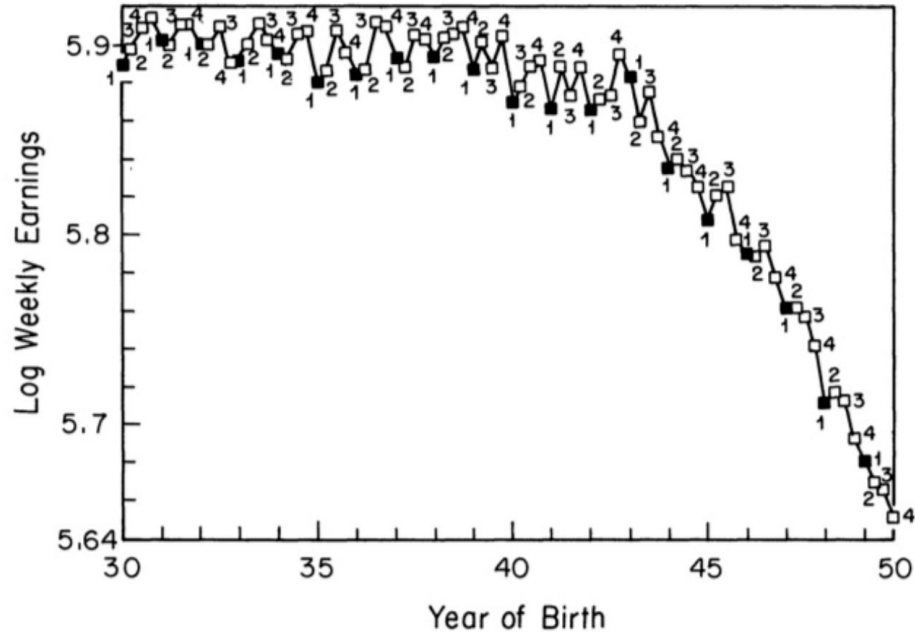


Figure 7.6: Reduced form visualization of the relationship between quarter of birth and log weekly earnings.
Reprinted from Angrist and Krueger (1991).

第一段階

$$S_i = X\pi_{10} + Z_1\pi_{11} + Z_2\pi_{12} + Z_3\pi_{13} + \eta_1$$

- ▷ 教育年数を出生四半期ダミーに回帰
- ▷ 基準は第4四半期(最も長い教育年数)
→ ダミー変数の係数は負であることが予想される

第一段階の結果

Outcome variable	Birth cohort	Mean	Quarter-of-birth effect ^a			<i>F</i> -test ^b [<i>P</i> -value]
			I	II	III	
Total years of education	1930–1939	12.79	-0.124 (0.017)	-0.086 (0.017)	-0.015 (0.016)	24.9 [0.0001]
	1940–1949	13.56	-0.085 (0.012)	-0.035 (0.012)	-0.017 (0.011)	18.6 [0.0001]
High school graduate	1930–1939	0.77	-0.019 (0.002)	-0.020 (0.002)	-0.004 (0.002)	46.4 [0.0001]
	1940–1949	0.86	-0.015 (0.001)	-0.012 (0.001)	-0.002 (0.001)	54.4 [0.0001]
Years of educ. for high school graduates	1930–1939	13.99	-0.004 (0.014)	0.051 (0.014)	0.012 (0.014)	5.9 [0.0006]
	1940–1949	14.28	0.005 (0.011)	0.043 (0.011)	-0.003 (0.010)	7.8 [0.0017]
College graduate	1930–1939	0.24	-0.005 (0.002)	0.003 (0.002)	0.002 (0.002)	5.0 [0.0021]
	1940–1949	0.30	-0.003 (0.002)	0.004 (0.002)	0.000 (0.002)	5.0 [0.0018]

第二段階の結果

Independent variable	OLS	2SLS
Years of schooling	0.0711 (0.0003)	0.0891 (0.0161)
9 Year-of-birth dummies	Yes	Yes
8 Region-of-residence dummies	No	No

Weak Instrument (弱い操作変数)

- **弱い操作変数**とは説明変数 S と操作変数 Z の相関が小さい操作変数のこと

- つまり、 $C(S, Z)$

が十分に大きくない時の操作変数が引き起こすバイアスが弱い操作変数のバイアス

弱い操作変数のバイアス

- 考えているモデル

$$y = \beta s + \varepsilon$$

$$s = Z' \pi + \eta$$

- ε と η が相関している場合、OLSのバイアスは

$$E[\hat{\beta}_{OLS} - \beta] = \frac{C(\varepsilon, S)}{V(S)} \xrightarrow{\text{置き換える}} \frac{\sigma_{\varepsilon\eta}}{\sigma_{\eta}^2}$$

弱い操作変数のバイアス

- 説明変数と操作変数の相関が弱い時、バイアスは

$$E[\hat{\beta}_{2SLS} - \beta] \approx \frac{\sigma_{\varepsilon\eta}}{\sigma_{\eta}^2} \frac{1}{F + 1}$$

- 相関が弱い時、**Weak Instrument**と呼ぶ
- F統計量が小さくなるので、バイアスが大きくなる

弱い操作変数のバイアス

$F \rightarrow 0$ のとき、2SLSのバイアスは $\frac{\sigma_{\varepsilon\eta}}{\sigma_{\eta}^2}$

$F \rightarrow \infty$ のとき、2SLSのバイアスは0

弱い操作変数

Independent variable	OLS	2SLS	OLS	2SLS	OLS	2SLS
Years of schooling	0.063	0.142	0.063	0.081	0.063	0.060
	(0.000)	(0.033)	(0.000)	(0.016)	(0.000)	(0.029)
First stage F	13.5		4.8		1.6	
<i>Excluded instruments</i>						
Quarter of birth	Yes		Yes		Yes	
Quarter of birth \times year of birth	No		Yes		Yes	
Number of excluded instruments	3		30		28	

Table 7.4: Effect of completed schooling on men's log weekly wages

Standard errors in parenthesis. First stage is quarter of birth dummies.

Independent variable	OLS	2SLS	OLS	2SLS
Years of schooling	0.063	0.083	0.063	0.081
	(0.000)	(0.009)	(0.000)	(0.011)
First stage F	2.4		1.9	
<i>Excluded instruments</i>				
Quarter of birth	Yes		Yes	
Quarter of birth \times year of birth	Yes		Yes	
Quarter of birth \times state of birth	Yes		Yes	
Number of excluded instruments	180		178	

Table 7.5: Effect of completed schooling on men's log weekly wages controlling for state of birth

Standard errors in parenthesis.

➤ 相関の弱いダミーをモデルに入れることでF統計量が小さくなる

弱い操作変数の対処法

- Use just-identified model with your strongest IV
- Limited-Information Maximum Likelihood (LIML、制限情報最尤推定量) 推定量を使う
- 結局は**強い操作変数を探す**のが一番